60244

B. Sc. 3rd Semester (Hons) Old Scheme Examination,

December–2015

MATHEMATICS

Paper–BHM–231

Advanced Calculus

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 60*

Note : *Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each section. **Question No. 9 is compulsory.***

*नोट : प्रत्येक खण्ड से **एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। **प्रश्न संख्या 9 अनिवार्य है।***

Section–I

खण्ड–I

1. (a) Show that :

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \text{ for } x \neq 0$$

$f(0) = 0$ is continuous

but not derivable at $x = 0$ 6

दिखाइए कि :

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} ; x \neq 0 \text{ के लिए}$$

$f(0) = 0$ सतत है

परन्तु $x = 0$ पर व्युत्पत्तियोग्य नहीं है। 6

StudentSuvidha.com

Download Study Material from StudentSuvidha.com

(b) Show that between any two roots of $e^x \cos x = 1$, there exist at least one root of $e^x \sin x - 1 = 0$. 6

दिखाइए कि $e^x \cos x = 1$ के किन्हीं दो मूलों के बीच, $e^x \sin x - 1 = 0$ का कम से कम एक मूल मौजूद होता है। 6

2. (a) Using Taylor's theorem, show that

$$x - \frac{x^3}{\angle 3} < \sin x < x \quad i x > 0$$ 6

टेलर के प्रमेय का उपयोग करते हुए, दिखाइए कि

$$x - \frac{x^3}{\angle 3} < \sin x < x \quad i x > 0$$ 6

(b) Evaluate :

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin h\, x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$$ 6

मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\sin h\, x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$$ 6

Section–II
खण्ड–II

3. (a) Show that :

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ is

continuous at origin but not differentiable at origin. 6

दिखाइए कि :

$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$

मूल पर सतत है परन्तु मूल पर अवकलनीय नहीं है। 6

(b) Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is dis-continuous at origin. 6

दिखाइए कि फलन :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूल पर अ-सतत है। 6

4. (a) If $u(x, y) = \log\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$, prove that

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}$$ 6

यदि $u(x, y) = \log\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)$, सिद्ध कीजिए कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}$$ 6

Download Study Material from StudentSuvidha.com
StudentSuvidha.com

(b) If $z = xy\, f\left(\frac{y}{x}\right)$ and z is constant then show that

$$\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{f\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x\left[y + x\frac{dy}{dx}\right]}{y\left[y - x\frac{dy}{dx}\right]}$$ 6

यदि $z = xy\, f\left(\frac{y}{x}\right)$ तथा z स्थिरांक है तब दिखाइए कि

$$\frac{f'\left(\frac{y}{x}\right)}{f\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x\left[y + x\frac{dy}{dx}\right]}{y\left[y - x\frac{dy}{dx}\right]}$$ 6

Section–III

खण्ड–III

5. (a) Show by an example that second order partial derivative of a function may exist at a point but function is not differentiable there at. 6

एक उदाहरण द्वारा दिखाइए कि किसी फलन का द्वितीय क्रम आंशिक अवकलज किसी बिन्दु पर मौजूद हो सकता है परन्तु फलन वहाँ पर अवकलनीय नहीं है। 6

(b) State and prove Schwartz's theorem. 6

श्वार्ज के प्रमेय को बताइए तथा सिद्ध कीजिए। 6

6. (a) Show that all triangles of given perimeter, the one with maximum area is equilateral. 6

दिखाइए कि दिए गए परिमाप के सभी त्रिकोण, एक अधिकतम क्षेत्रफल वाला समभुज होता है। 6

(b) Find the minimum value of function $x + y + z$ subject to the condition

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$$ 6

$x + y + z$ फलन का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, बशर्ते कि

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1$$ 6

Section–IV

खण्ड–IV

7. (a) Find the curvature and torsion of curves

$x = a\cos t, y = a\sin t, z = a\, t\cot\alpha$ 6

वक्रों $x = a\cos t, y = a\sin t, z = a\, t\cot\alpha$ की वक्रता तथा विमोटन ज्ञात कीजिए। 6

(b) Find the equation of osculating plane at the point t of the curve

$x = a\cosh t, y = a\sinh t, z = b\, t.$ 6

वक्र $x = a\cosh t, y = a\sinh t, z = b\, t$

के बिन्दु t पर आश्लेषी तल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 6

Download Study Material from StudentSuvidha.com
StudentSuvidha.com

8. (a) Show that the involute of a circular helix are plane curves. 6

दिखाइए कि किसी वृत्तीय सर्पिल के अंतर्वलन समतल वक्र हैं ?

(b) Find the envelope of family of curves

$3a^2x - 3ay + z = a^3$ where a is a parameter. 6

वक्रों $3a^2x - 3ay + z = a^3$ के परिवार का अन्वालोप ज्ञात कीजिए। जहाँ a एक प्राचल है। 6

Section–V

खण्ड–V

9. (a) Using $\varepsilon - \delta$ definition, prove that $|x|$ is a continuous function. 2

$\varepsilon - \delta$ परिभाषा का उपयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि $|x|$ एक सतत फलन है। 2

(b) Show that :

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

has discontinuity of second kind at $x = a$ 2

दिखाइए कि :

$$f(x) = \frac{1}{x-a}$$

की $x = a$ पर द्वितीय प्रकार की असततता है। 2

(c) Verify Euler theorem for the function

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$ 2

फलन

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

के लिए यूले के प्रमेय को सत्यापित कीजिए। 2

(d) The necessary and sufficient condition for the curve to be a plane curve is

$$[\vec{r}\ \vec{r}''\ \vec{r}'''] = 0$$ 2

वक्र को समतल वक्र होने के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त शर्त है

$$[\vec{r}\ \vec{r}''\ \vec{r}'''] = 0$$ 2

(e) What are Sarret-Frenet formula ? 2

सैरेट-फ्रेनेट सूत्र क्या हैं ? 2

(f) If $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ is finite, find 'a' and the limit. 2

यदि $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x + a \sin x}{x^3}$ परिमित है, तो 'a' तथा सीमा ज्ञात कीजिए। 2

Download Study Material from StudentSuvidha.com
StudentSuvidha.com