(d) Find the Laplace Transform of $[t^3 + \sin^2 t]$.

(e) Find the Inverse Laplace Transform of $\frac{1}{(s+2)^2}$.

(f) State Shifting Property and Modulation property of Fourier Transform.

(क) शक्ति शृंखला $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3m)!}{(m!)^3} x^m$ की अभिसारिता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(ख) दिखाइए कि : $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$

(ग) $2x^2 - 3x + 8$ को लेगेन्द्रे के बहुपदों के पदों में व्यक्त कीजिए।

(घ) $[t^3 + \sin^2 t]$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए।

(ङ) $\frac{1}{(s+2)^2}$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए।

(च) फोरियर रूपांतर के शिफ्टिंग गुण तथा मॉड्यूलेशन गुण का उल्लेख कीजिए।

StudentSuvidha.com

Download Study Material from StudentSuvidha.com

B.Sc. 4th Semester (New Scheme) Examination,

May–2016

MATHEMATICS

Paper–BM–242–P–II

Special Functions and Integral Transforms

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 40*

Note : *Attempt **five** questions in all, selecting at least **one** question from each section. **Question No. 9 is compulsory.** All questions carry equal marks.*

नोट : *प्रत्येक खण्ड से कम से कम **एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। **प्रश्न संख्या 9 अनिवार्य है।** सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।*

Section–I

खण्ड–I

1. (a) Find the power series solution of the following differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + (x-3)\frac{dy}{dx} + y = 0$ about $x = 2$.

(b) Find the series solution of the following differential equation about $x = 0$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right)y = 0$$

(क) $x = 2$ के बारे में निम्नलिखित अवकल समीकरण का शक्ति शृंखला हल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (x-3)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

(ख) $x = 0$ के बारे में निम्नलिखित अवकल समीकरण का शृंखला हल ज्ञात कीजिए :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - \left(x^2 + \frac{5}{4}\right)y = 0$$

2. (a) Prove that : $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$ for all integrals values of n.

(b) Find the solution of the following equation in terms of Bessel's function

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 4\left(x^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

(क) सिद्ध कीजिए कि n के सभी समाकल मानों के लिए

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta$$

(ख) बेसेल के फलन के पदों में निम्नलिखित समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + 4\left(x^2 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0$$

Download Study Material from StudentSuvidha.com

Section–II

खण्ड–II

3. (a) Prove that :

$$\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,t^n\,P_n(x)$$

(b) Prove that :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,(1-2tx+t^2)^{-1/2}\,dx = \frac{2t^n}{2n+1}$$

(क) सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1-t^2}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,t^n\,P_n(x)$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,(1-2tx+t^2)^{-1/2}\,dx = \frac{2t^n}{2n+1}$$

4. (a) Show that : $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x)$

(b) Express $H(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 3$ in terms of Hermitian polynomial.

(क) दिखाइए कि $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$

(ख) हर्मिशियन बहुपदों के पदों में

$$H(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 3$$

को व्यक्त कीजिए।

Section–III

खण्ड–III

5. (a) Show that : $L\int_0^t \left(\frac{1-e^{-2t}}{t}\right) dt = \frac{1}{s}\log\left(1+\frac{2}{s}\right)$.

(b) Find the Inverse Laplace transform of the function

$$\log\left(\frac{(s+1)^2}{(s+2)(s+3)}\right).$$

(क) दिखाइए कि : $L\int_0^t \left(\frac{1-e^{-2t}}{t}\right) dt = \frac{1}{s}\log\left(1+\frac{2}{s}\right)$.

(ख) फलन $\log\left(\frac{(s+1)^2}{(s+2)(s+3)}\right)$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए।

6. (a) Use Convolution Theorem to evaluate

$$L^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right).$$

Download Study Material from StudentSuvidha.com

(b) The co-ordinate (x, y) of a particle moving along a plane curve at any time t is given by

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 2x &= \sin 2t \\ \frac{dx}{dt} - 2y &= \cos 2t \end{aligned}\right\}$$. If at t = 0, x = 1 and y = 0, show by using transforms that particle moves along the curve $4x^2 + 4xy + 5y^2 = 4$.

(क) $L^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+4)^2}\right)$ का मूल्यांकन करने के लिए परिकलन प्रमेय का उपयोग कीजिए।

(ख) एक कण के निर्देशांक (x, y) जो एक वक्र के तल के साथ किसी समय t पर गति कर रहा है निम्न द्वारा दिया है

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + 2x &= \sin 2t \\ \frac{dx}{dt} - 2y &= \cos 2t \end{aligned}\right\}$$ यदि t = 0 पर x = 1 तथा y = 0, रूपांतरों के उपयोग द्वारा दिखाइए कि कण वक्र $4x^2 + 4xy + 5y^2 = 4$ के साथ गतिमान है।

Section–IV

खण्ड–IV

7. (a) Find the Fourier cosine transform of e^{-x^2}.

(b) Find f (x) if its Fourier sine transform is $\frac{s}{1+s^2}$.

(क) e^{-x^2} का फोरियर कोज्या रूपांतर ज्ञात कीजिए।

(ख) f (x) ज्ञात कीजिए यदि इसका फोरियर ज्या रूपांतर $\frac{s}{1+s^2}$ है।

8. (a) Find the finite cosine transform of $\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2$.

(b) The temperature u in a semi-infinite rod is determined by $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $0 \le x < \infty$ with the conditions :

(i) $u = 0$ when $t = 0, x > 0$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\mu$ when $x = 0$

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x} \to 0$ as $x \to \infty$

Determine the temperature formula.

Download Study Material from StudentSuvidha.com

(क) $\left(1-\frac{x}{\pi}\right)^2$ का परिमित कोज्या रूपांतर ज्ञात कीजिए।

(ख) एक अर्ध-अपरिमित छड़ में तापमान u का निर्धारण $\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $0 \le x < \infty$ द्वारा निम्न शर्तों सहित किया जाता है :

(i) $u = 0$ जब $t = 0, x > 0$

(ii) $\frac{\partial u}{\partial x} = -\mu$ जब $x = 0$

(iii) $\frac{\partial u}{\partial x} \to 0$ जैसे $x \to \infty$

तापमान सूत्र का निर्धारण कीजिए।

Section–V

खण्ड–V

9. (a) Find the radius of convergence of the power series $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(3m)!}{(m!)^3} x^m$.

(b) Show that: $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$

(c) Express $2x^2 - 3x + 8$ in terms of Legendre's polynomials.