(d) Let u, v, w be the orthogonal co-ordinates, prove that :

$$\vec{e_1} = \vec{E_1},\ \vec{e_2} = \vec{E_2},\ \vec{e_3} = \vec{E_3}$$

माना u, v, w ऑर्थोगोनल निर्देशांक हैं, सिद्ध कीजिए $\vec{e_1} = \vec{E_1},\ \vec{e_2} = \vec{E_2},\ \vec{e_3} = \vec{E_3}$ ।

(e) State Stoke's theorem.

स्टोक प्रमेय बताइए।

(f) Evaluate $\int_1^2 \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})\, dt$, where :

$$\vec{a} = t\hat{i} + 3\hat{j} + 2t\hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i} + t\hat{j} + \hat{k}$$

$\int_1^2 \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})\, dt$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ :

$$\vec{a} = t\hat{i} + 3\hat{j} + 2t\hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i} + t\hat{j} + \hat{k}$$

Roll No. ....

91580

B. Sc. 2nd Sem. Mathematics (New) Examination – May, 2016

VECTOR CALCULUS MATH - III

Paper : BM-123

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 40*

Before answering the question, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt ***five*** questions in all, selecting ***one*** question from each Section. Section V is ***compulsory***. Marks are given against each question.

प्रत्येक खण्ड से ***एक*** प्रश्न चुनते हुए, कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। खण्ड V ***अनिवार्य*** है। प्रत्येक प्रश्न का अंक उसके सामने अंकित है।

SECTION – I

खण्ड – I

1. (a) If $\vec{A} = \hat{i} + a\hat{j} + a^2\hat{k},\ \vec{B} = \hat{i} + b\hat{j} + b^2\hat{k}, \vec{C} = \hat{i} + c\hat{j} + c^2\hat{k}$, are co-planer and $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$, then show that $abc = -1$. $3\frac{1}{2}$

यदि $\vec{A}=\hat{i}+a\hat{j}+a^2\hat{k}$, $\vec{B}=\hat{i}+b\hat{j}+b^2\hat{k}$, $\vec{C}=\hat{i}+c\hat{j}+c^2\hat{k}$ समतलीय हैं और $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix}=0$, तो दिखाइए कि $abc=-1$ ।

(b) If $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ and $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ are the reciprocal system of vectors, prove that $\vec{a}\times\vec{a}'+\vec{b}\times\vec{b}'+\vec{c}\times\vec{c}'=0$. $3\frac{1}{2}$

यदि $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ और $\vec{a}',\vec{b}',\vec{c}'$ सदिशों के व्युत्क्रम तंत्र हैं, सिद्ध कीजिए कि $\vec{a}\times\vec{a}'+\vec{b}\times\vec{b}'+\vec{c}\times\vec{c}'=0$ ।

2. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for the vector function $\vec{f}$ of a scalar variable t to have a constant magnitude, if $\vec{f}\cdot\frac{d\vec{f}}{dt}=0$. $3\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिए कि अदिश वैरीयेबल t के सदिश फलन $\vec{f}$ के लिए स्थिर परिमाप होना आवश्यक और पर्याप्त शर्त है, यदि $\vec{f}\cdot\frac{d\vec{f}}{dt}=0$ है।

(b) A particle moves along the curves $x=3t^2, y=t^2-2t, z=t^3$. Find its velocity and acceleration at $t=1$ in the direction of vector $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$. $3\frac{1}{2}$

एक कण वक्रों $x=3t^2, y=t^2-2t, z=t^3$ के अनुदिश चलता है। सदिश $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ की दिशा में $t=1$ पर इसका वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए।

SECTION – II

खण्ड – II

3. (a) Show that $\nabla f(r)\times\vec{r}=0$, where $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$. $3\frac{1}{2}$

दिखाइए कि $\nabla f(r)\times\vec{r}=0$, जहाँ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$.

(b) Find the constants a, b, c so that the directional derivative of $\phi(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$ at $(1,2,-1)$ has a maximum of magnitude 64 in a direction parallel to z-axis. $3\frac{1}{2}$

नियतांक a, b, c ज्ञात कीजिए, इस प्रकार कि $(1,2,-1)$ पर $\phi(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$ का डाइरेक्शनल डेरिवेटिव का अधिकतम परिमाण z-अक्ष के समान्तर दिशा में 64 है।

4. (a) If $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ and $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, then prove that div $(\hat{r})=\frac{2}{r}$. $3\frac{1}{2}$

यदि $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ और $r=|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, तो सिद्ध कीजिए कि div $(\hat{r})=\frac{2}{r}$ ।

(b) Find curl (curl $\vec{f}$) of the function $\vec{f} = y(x+z)\hat{i} + z(x+y)\hat{j} + x(y+z)\hat{k}$. $3\frac{1}{2}$

फलन $\vec{f} = y(x+z)\hat{i} + z(x+y)\hat{j} + x(y+z)\hat{k}$ का Curl (Curl $\vec{f}$) ज्ञात कीजिए।

SECTION – III

खण्ड – III

5. (a) Derive the formula of divergence of a vector point function $\vec{f}$ in terms of curvilinear co-ordinates. $3\frac{1}{2}$

एक सदिश बिन्दु फलन $\vec{f}$ का वक्ररेखीय निर्देशांकों के पदों में डाइवरजेन्स का सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।

(b) Express $x\hat{i} + 2y\hat{j} + yzk$ in spherical co-ordinates. $3\frac{1}{2}$

गोलीय निर्देशांकों में $x\hat{i} + 2y\hat{j} + yzk$ को स्पष्ट कीजिए।

6. (a) If u, v, w are orthogonal curvilinear co-ordinates, then $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ and $\nabla u, \nabla v, \nabla w$ are reciprocal system of vectors. $3\frac{1}{2}$

यदि u, v, w ऑर्थोगोनल वक्ररेखीय निर्देशांक हैं, तो $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$ और $\nabla u, \nabla v, \nabla w$ सदिशों के व्युत्क्रम निकाय हैं।

(b) Prove that $\frac{d}{dt}(\hat{e}_\phi) = -\sin\theta \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_r - \cos\theta \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\theta$. $3\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{d}{dt}(\hat{e}_\phi) = -\sin\theta \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_r - \cos\theta \frac{d\phi}{dt}\hat{e}_\theta$$

SECTION – IV

खण्ड – IV

7. (a) Evaluate $\oint_C r \times dr$ along the circle represented by $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$. $3\frac{1}{2}$

$x^2 + y^2 = a^2, z = 0$ द्वारा प्रदर्शित वृत्त के अनुदिश $\oint_C r \times dr$ का मूल्यांकन कीजिए।

(b) Evaluate $\iiint_V \phi\, dV$, where $\phi = 45x^2y$ and V is the region bounded by the planes $4x+2y+z=0, x=0, y=0, z=0$. $3\frac{1}{2}$

$\iiint_V \phi\, dV$, का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\phi = 45x^2y$ और V समतलों $4x+2y+z=0, x=0, y=0, z=0$ से आबद्ध क्षेत्र है।

8. (a) Evaluate $\iint_S \vec{f}.nds$ with the help of Gauss theorem for $\vec{f} = 6z\hat{i} + (2x+y)\hat{j} - x\hat{k}$ taken over the regions s bounded by the surface of the cylinder $x^2+z^2=9$ included between $x=0, y=0, z=0$ and $y=8$. $3\frac{1}{2}$

$x=0, y=0, z=0$ और $y=8$ के मध्य इनक्लूड किये गये बेलन $x^2+z^2=9$ के सतह से आबद्ध क्षेत्र s के ऊपर लिये गये $\vec{f} = 6z\hat{i} + (2x+y)\hat{j} - x\hat{k}$ के लिए गौस प्रमेय की सहायता से $\iint_S \vec{f}.nds$ का मूल्यांकन कीजिए।

(b) If S is any closed surface enclosing a volume V and $f = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$, then show that $\iint_S \vec{f}.\hat{n}\, ds = 6V$. $3\frac{1}{2}$

यदि आयतन V और $f = x\hat{i} + 2y\hat{j} + 3z\hat{k}$ को इनक्लोज करते हुए S कोई क्लोज्ड तल है, तो दिखाइए कि $\iint_S \vec{f}.\hat{n}\, ds = 6V$ ।

SECTION – V

खण्ड – V

9. (a) If $\vec{a}$ is a constant vector and $\vec{f} = \vec{a} \times \vec{r}$, prove that div $\vec{f} = 0$.

यदि $\vec{a}$ एक नियत सदिश है और $\vec{f} = \vec{a} \times \vec{r}$, सिद्ध कीजिए div $\vec{f} = 0$ ।

(b) Interpret the symbol $\vec{f}.\nabla$ and show that $(\vec{f}.\nabla)\phi$ and $\vec{f}.\nabla\phi$ are same.

संकेत $\vec{f}.\nabla$ को इण्टरप्रेट कीजिए और दिखाइए कि $(\vec{f}.\nabla)\phi$ और $\vec{f}.\nabla\phi$ समान हैं।

(c) Prove that $div\,\vec{r} = 3$, where $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

सिद्ध कीजिए कि $div\,\vec{r} = 3$, जहाँ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ।