94006

B.Sc. 5th Semester Pass (New Scheme) Examination,

December–2015

MATHEMATICS

Paper–12–BM–351

Real Analysis

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 40*

Note : *Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each section. **Question No. 9 is compulsory.***

नोट : *प्रत्येक खण्ड से **एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। **प्रश्न सं. 9 अनिवार्य है।***

Section–I

खण्ड–I

1. (a) Show that the function f defined on [0, 1] by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ -1 & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

is bounded but not R-integrable.

(b) Prove that a continuous function '**f** ' on [a, b] is integrable on [a, b]. Is the converse true ? Justify.

StudentSuvidha.com

Download Study Material from StudentSuvidha.com

Download Study Material from StudentSuvidha.com

(क) दिखाइए कि [0, 1] पर

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -1 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f बंधित है परन्तु R-समाकलनीय नहीं है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि [a, b] पर एक सतत् फलन 'f', [a, b] पर समाकलनीय है। क्या विपरीत सत्य है ? पुष्टि कीजिए।

2. (a) Using definition, evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$

(b) If f and g are two integrable function on [a, b], then fg is integrable on [a, b].

(क) परिभाषा का उपयोग करते हुए, $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ का मूल्यांकन कीजिए।

(ख) यदि f तथा g, [a, b] पर दो समाकलनीय फलन हैं, तब fg, [a, b] पर समाकलनीय है।

Section–II

खण्ड–II

3. (a) Show that $\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x \, dx$ exists if and only if $p > 0$ and $q > 0$.

(b) Discuss the convergence of Gamma function.

(क) दिखाइए कि $\int_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x \, dx$ मौजूद है, यदि तथा केवल यदि $p > 0$ तथा $q > 0$

(ख) गामा फलन की अभिसारिता की विवेचना कीजिए।

4. (a) Examine the convergence of the improper integeral $\int_0^{\infty} \cos x^2 \, dx$.

(b) Evaluate $\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} ax}{x(1+x^2)} dx$ if $\alpha \geq 0$.

(क) असंगत समाकल $\int_0^{\infty} \cos x^2 \, dx$ की अभिसारिता की समीक्षा कीजिए।

(ख) मूल्यांकन कीजिए $\int_0^{\infty} \frac{\tan^{-1} ax}{x(1+x^2)} dx$ यदि $\alpha \geq 0$.

Section–III

खण्ड–III

5. (a) Let d be a function of $R^2 \times R^2 \to R$ such that

$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, where $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R^2$.

(b) If A and B are subsets of a metric space (X, d), then

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

(क) मान लें d एक फलन हो $R^2 \times R^2 \to R$ का, इस प्रकार से कि

$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max \{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$, जहाँ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R^2$

(ख) यदि A तथा B एक मात्रिक स्थान (X, d) के उपसमुच्चय हैं, तब

$$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

6. (a) Let A be a subset of metric space (X, d) then A° is the union of all open sets contained in A.

(b) Every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence but converse need not be true.

(क) मान लें A मात्रिक स्थान (X, d) का एक उपसमुच्चय हो तब A° ; A में अंतर्विष्ट सभी खुले समुच्चयों का संघ है।

(ख) एक मात्रिक स्थान में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम काउची अनुक्रम है परन्तु विपरीत जरूरी नहीं है सत्य हो।

Section–IV

खण्ड–IV

7. (a) Let (X, d) and (Y, d*) be two metric spaces and let f, g be two continuous functions of X into Y. Then the set $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ is a closed subset of X.

(b) Every closed subset of a compact metric space is compact.

(क) मान लें (X, d) तथा (Y, d*) दो मात्रिक स्थान हों तथा मान लें f, g ; Y में X के दो सतत फलन हों। तब समुच्चय $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$, X का बन्द उपसमुच्चय है।

(ख) एक संहत मात्रिक स्थान का प्रत्येक बन्द उपसमुच्चय संहत है।

8. (a) Prove that continuous image of a compact metric space is compact.

Download Study Material from StudentSuvidha.com
StudentSuvidha.com

Download Study Material from StudentSuvidha.com

(b) Let (X, d) be a metric space and let $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\wedge}$ be a non empty collection of connected subsets of X such that $\bigcap_{\lambda\in\wedge}\{C_\lambda\}\neq\phi$. Then $\bigcup_{\lambda\in\wedge}\{C_\lambda\}$ is a connected set.

(क) सिद्ध कीजिए कि एक संहत मात्रिक स्थान की सतत आकृति संहत है।

(ख) मान लें (X, d) एक मात्रिक स्थान हो तथा मान लें $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\wedge}$; X के संयोजित उपसमुच्चयों का एक गैर रिक्त संग्रह हो इस प्रकार से कि $\bigcap_{\lambda\in\wedge}\{C_\lambda\}\neq\phi$.

तब $\bigcup_{\lambda\in\wedge}\{C_\lambda\}$ एक संयोजित समुच्चय है।

Compulsory Question

अनिवार्य प्रश्न

9. (a) If $f(x)=\frac{1}{x}$ on [1, 4] and P = {1, 2, 3, 4} be the partition of [1, 4], then compute L (f, P) and U (f, P).

(b) State Darboux's Theorem.

(c) Examine the convergence of $\int_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$

(d) Define open sphere and closed sphere.

(e) A subset A is a closed set if and only if $\overline{A}=A$

(f) State Baire's Category Theorem.

(क) यदि [1, 4] पर $f(x)=\frac{1}{x}$ तथा P = {1, 2, 3, 4}; [1, 4] का विभाजन हो, तब L (f, P) तथा U (f, P) की गणना कीजिए।

(ख) डारबॉक्स प्रमेय को बताइए।

(ग) $\int_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$ की अभिसारिता की जाँच कीजिए।

(घ) खुले गोलक तथा बन्द गोलक को परिभाषित कीजिए।

(ङ) एक उपसमुच्चय A एक बन्द समुच्चय है यदि तथा केवल यदि $\overline{A}=A$

(च) बेयर के श्रेणी प्रमेय को बताइए।