94007

B. Sc. 5th Semester Pass (New Scheme) Examination,

December–2015

MATHEMATICS

Paper–12 BSM–352

Groups and Rings

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 40*

Note : *Attempt **five** questions in all, selecting one question from each section. Q.No. 9 is **compulsory**.*

नोट : *प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। प्रश्न सं. 9 अनिवार्य है।*

Section–I

खण्ड–I

1. (a) Prove that every subgroup of a cyclic group is cyclic.

(b) Use Lagrange's theorem to show that any group of prime order can have no proper subgroups.

(क) सिद्ध कीजिए कि किसी चक्रीय समूह का प्रत्येक उपसमूह चक्रीय होता है।

(ख) लाग्रांगे के प्रमेय के उपयोग द्वारा यह दिखाइए कि अभाज्य क्रम के किसी समूह के कोई उपयुक्त उपसमूह नहीं हो सकते।

2. (a) If M and N are two normal subgroups of G such that $N \cap M = \{e\}$, then for every $n \in N$ and $m \in M$, show that $nm = mn$.

(b) Prove that every quotient group of a cyclic group is cyclic.

(क) यदि M तथा N ; G के दो प्रसामान्य उपसमूह हैं इस प्रकार से कि $N \cap M = \{e\}$, तब प्रत्येक $n \in N$ तथा $m \in M$ के लिए, दिखाइए कि $nm = mn$

(ख) सिद्ध कीजिए कि किसी चक्रीय समूह का प्रत्येक लब्धि समूह चक्रीय होता है।

Section–II

खण्ड–II

3. (a) Prove that every automorphism of a group is auto morphism of that group.

(b) Let G be a finite cyclic group of order n and $f: G \to G$ defined by $f(x) = x^m$ is an automorphism. Show that $(m, n) = 1$.

(क) सिद्ध कीजिए कि एक समूह की प्रत्येक स्वाकारिकता उस समूह की स्वाकारिकता है।

(ख) मान लें G क्रम n का एक परिमित चक्रीय समूह हो तथा $f(x) = x^m$ द्वारा परिभाषित $f: G \to G$ एक स्वाकारिकता है। दिखाइए कि $(m, n) = 1$

4. (a) Prove that centre of a group G is a normal subgroup of G.

(b) State and prove Cayley Theorem.

(क) सिद्ध कीजिए कि एक समूह G का केन्द्र G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

(ख) केले प्रमेय को बताइए तथा सिद्ध कीजिए।

Section–III

खण्ड–III

5. (a) Prove that every field is an integral domain.

(b) Prove that every finite ring has non-zero characteristic.

(क) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक समेकित प्रक्षेत्र है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित वलय की गैर शून्य विशेषता होती है।

6. (a) If S_1 and S_2 be two ideals of a ring R, then prove that $S_1 + S_2 = < S_1 \cup S_2 >$.

(b) Show that left annihilator of a left ideal is an ideal.

(क) यदि S_1 तथा S_2 एक वलय R के दो आदर्श हों, तब सिद्ध कीजिए कि $S_1 + S_2 = < S_1 \cup S_2 >$

(ख) दिखाइए कि एक बाँए आदर्श का बाँया शून्यकारी एक आदर्श है।

Section–IV

खण्ड–IV

7. (a) The integral domain < z, +, . > of integers is a Euclidean domain.

(b) If R is an integral domain, then R [x] is also an integral domain.

(क) समाकलों का समाकल प्रक्षेत्र < z, +, . > एक यूक्लिडीय प्रक्षेत्र है।

(ख) यदि R एक समाकल प्रक्षेत्र है, तब R [x] भी एक समाकल प्रक्षेत्र है।

8. (a) Prove that every field < F, +, . > is always a UFD.

(b) Show that the polynomial $x^4 + 1$ is irreducible over Q.

(क) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र < F, +, . > हमेशा एक UFD होता है।

(ख) दिखाइए कि बहुपद $x^4 + 1$; Q के ऊपर अलघुकरणीय है।

Section–V

खण्ड–V

9. (i) Give an example to show that prime ideal need not be maximal.

(ii) Show that the ring $Z_5 = \{(0, 1, 2, 3, 4), +_5, X_5\}$ has no proper ideal, by using theorem.

(iii) If G is a group of order 6, then whether G has a subgroup of order 4 or not ?

(iv) State third theorem of isomorphism.

(v) Write $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ as the product of disjoint cycles.

(vi) Give one example of ring with zero divisors.

(i) यह दिखाने के लिए एक उदाहरण दीजिए कि अभाज्य आदर्श को उच्चिष्ठ होने की आवश्यकता नहीं।

(ii) प्रमेय के उपयोग द्वारा दिखाइए कि वलय

$Z_5 = \{(0, 1, 2, 3, 4), +_5, X_5\}$ का कोई उचित आदर्श नहीं होता है।

(iii) यदि G क्रम 6 का एक समूह है, तब या तो G क्रम 4 का एक उपसमूह है अथवा नहीं।

(iv) समरूपता के तीसरे प्रमेय को बताइए।

(v) असंबद्ध चक्रों के गुणनफल के रूप में $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ को लिखिए।

(vi) शून्य विभाजकों सहित वलय का एक उदाहरण दीजिए।