92381

B.A. 4th Semester (New Scheme) Examination,

May–2016

MATHEMATICS

Paper–BM–241, P–I

Sequences and Series

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 27*

Note : *Attempt **five** questions in all, selecting **one** question from each section. **Question No. 9 of Section–V is compulsory.***

नोट : *प्रत्येक खण्ड से **एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल **पाँच** प्रश्न कीजिए। **खण्ड-V का प्रश्न संख्या 9 अनिवार्य है।***

Section–I

खण्ड–I

1. (a) State and prove Archemedean property of real numbers. 2

(b) Prove that the set $\{x : x \in Q, x > 0 \text{ and } x^2 < 3\}$ does not have any *l*ub in Q. 2½

(क) वास्तविक संख्याओं के आर्कीमीडीजी गुण को बताइए तथा सिद्ध कीजिए। 2

(ख) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{x : x \in Q, x > 0 \text{ तथा } x^2 < 3\}$ का Q में कोई *l*ub नहीं है। 2½

StudentSuvidha.com

Download Study Material from StudentSuvidha.com

2. (a) $A^\circ \subseteq A$ for every set A. 2

(b) If A and B are any two subsets of R, then $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$, Here dash over a set denotes derived set. 2½

(क) प्रत्येक समुच्चय A के लिए $A^\circ \subseteq A$ 2

(ख) यदि A तथा B; R के कोई दो उप समुच्चय हैं, तब $A \subseteq B \Rightarrow A' \subseteq B'$, यहाँ किसी समुच्चय के ऊपर डैश व्युत्पन्न समुच्चय को इंगित करता है। 2½

Section–II

खण्ड–II

3. (a) Using Cauchy's second theorem on limits, prove that

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n} = e \quad 2$$

(b) Prove that the sequence $\left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle$ is a Cauchy sequence. 2½

(क) सीमाओं पर काउची के द्वितीय प्रमेय का उपयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{2}{1}\right)^1\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]^{1/n} = e \quad 2$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle$ एक काउची अनुक्रम है। 2½

4. (a) Test the convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ where

$$a_n = \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1} \quad 2$$

(b) State and prove Cauchy's general principle of convergence of series. 2½

(क) अनुक्रम $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए जहाँ

$$a_n = \sqrt{n^4+1} - \sqrt{n^4-1} \quad 2$$

(ख) शृंखला की अभिसारिता के काउची के साधारण सिद्धान्त को बताइए तथा सिद्ध कीजिए। 2½

StudentSuvidha.com
Download Study Material from StudentSuvidha.com

Section–III

खण्ड–III

5. (a) Test the convergence of the series

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.5}+\frac{1.3.5}{2.5.8}+\ldots\ldots$$ 2

(b) State and prove D'Alembert's ratio test. 2½

(क) श्रृंखला $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.5}+\frac{1.3.5}{2.5.8}+\ldots\ldots$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए। 2

(ख) डी'ऐलेम्बर्ट के अनुपात परीक्षण को बताइए तथा सिद्ध कीजिए। 2½

6. (a) Examine the convergence of the following series

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3x^3+\ldots\ldots$$ 2

(b) Discuss the convergence of the series

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}x+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^2+\ldots\ldots, \text{ where } x>0$$ 2½

(क) निम्नलिखित श्रृंखला की अभिसारिता की जाँच कीजिए

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x+\left(\frac{3}{4}\right)^2x^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3x^3+\ldots\ldots$$ 2

(ख) श्रृंखला $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}x+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^2+\ldots\ldots$ की अभिसारिता की विवेचना कीजिए, जहाँ $x>0$ 2½

Section–IV

खण्ड–IV

7. (a) Prove that every absolutely convergent series is convergent. 2

(b) Test the convergence and absolute convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ 2½

(क) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक स्वतः अभिसारी श्रृंखला अभिसारी है। 2

(ख) श्रृंखला $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$ की अभिसारिता तथा स्वतः अभिसारिता का परीक्षण कीजिए। 2½

8. (a) Show that the series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n^3+1)^{1/3}-n}{\log n}$ is convergent. 2

StudentSuvidha.com

Download Study Material from StudentSuvidha.com

(b) Test the convergence of the series

$$1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+\ldots\ldots$$ 2½

(क) दिखाइए कि श्रृंखला $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n^3+1)^{1/3}-n}{\log n}$ अभिसारी है। 2

(ख) श्रृंखला $1-\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4^2.5}-\frac{1}{4^3.7}+\ldots\ldots$ की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए। 2½

Section–V

खण्ड–V

9. (a) Define Least Upper bound (ℓub) of a set. 1½

(b) Define interior point of a set. 1½

(c) Define Limit point of a set. 1½

(d) Define null sequence. 1½

(e) State Cauchy's first theorem on limits. 1½

(f) State Generalized Harmonic series test or p-series test. 1½

(क) किसी समुच्चय के न्यूनतम ऊपरी बन्ध (ℓub) को परिभाषित कीजिए। 1½

(ख) किसी समुच्चय के आंतरिक बिन्दु को परिभाषित कीजिए। 1½

(ग) किसी समुच्चय के सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिए। 1½

(घ) शून्य अनुक्रम को परिभाषित कीजिए। 1½

(ङ) सीमाओं पर काउची के प्रथम प्रमेय को बताइए। 1½

(च) साधारणीकृत हरात्मक श्रृंखला परीक्षण अथवा p-श्रृंखला परीक्षण का उल्लेख कीजिए। 1½

StudentSuvidha.com
Download Study Material from StudentSuvidha.com