

92382

B.A. 4th Semester (New Scheme) Examination,
May-2016

MATHEMATICS

Paper-BM-242-P-II

(Special Functions and Integral Transforms)

Time allowed : 3 hours]

[Maximum marks : 27

Note : Attempt any five questions in all, selecting one question from each section. Question No. 9 is compulsory.

नोट : प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न सं० 9 अनिवार्य है।

Section-I

खण्ड-I

1. (a) Solve in series :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (2x^2 + 1)y = 0 \quad 2\frac{1}{2}$$

(b) Solve:

$$(1 + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0. \quad 2$$

(क) श्रेणी में हल कीजिए :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (2x^2 + 1)y = 0 \quad 2\frac{1}{2}$$

(ख) हल कीजिए :

$$(1 + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0. \quad 2$$

92382-P-7-Q-9 (16)

[P.T.O.]

2. (a) Prove that :

$$J_n'(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad 2\frac{1}{2}$$

(b) Show that :

$$J_4(x) = \left[\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x} \right] J_1(x) + \left[1 - \frac{24}{x^2} \right] J_0(x) \quad 2$$

(क) सिद्ध कीजिए :

$$J_n'(x) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \quad 2\frac{1}{2}$$

(ख) दिखाइए :

$$J_4(x) = \left[\frac{48}{x^3} - \frac{8}{x} \right] J_1(x) + \left[1 - \frac{24}{x^2} \right] J_0(x) \quad 2$$

Section-II

खण्ड-II

3. (a) Prove that :

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x), |x| \leq 1, |t| < 1 \quad 2\frac{1}{2}$$

(b) Show that :

$$P'_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2} \quad 2$$

(क) सिद्ध कीजिए :

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x), |x| \leq 1, |t| < 1 \quad 2\frac{1}{2}$$

(ख) दिखाइए :

$$P'_{2n+1}(0) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n} (n!)^2} \quad 2$$

4. (a) Prove that :

$$H_n'(x) = 2x H_n(x) - H_{n+1}(x) \quad 2\frac{1}{2}$$

(b) Show that :

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad 2$$

(क) सिद्ध कीजिए :

$$H_n'(x) = 2x H_n(x) - H_{n+1}(x) \quad 2\frac{1}{2}$$

(ख) दिखाइए :

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad 2$$

Section-III

खण्ड-III

5. (a) Prove that :

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad 2\frac{1}{2}$$

(4)

92382

(b) Evaluate :

$$L^{-1} \left[\log \frac{s^2 + 1}{(s-1)^2} \right] \quad 2$$

(क) सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad 2\frac{1}{2}$$

(ख) मान निकालिए :

$$L^{-1} \left[\log \frac{s^2 + 1}{(s-1)^2} \right] \quad 2$$

6. (a) Solve by transform method :

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - k^4 y = 0$$

$$\text{Where } y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \quad 2\frac{1}{2}$$

(b) Solve :

$$3Dx + Dy + 2x = 1$$

$$Dx + 4Dy + 3y = 0$$

$$\text{Where } x(0) = 3, y(0) = 0 \quad 2$$

(क) रूपांतर विधि से हल कीजिए :

$$\frac{d^4 y}{dt^4} - k^4 y = 0$$

$$\text{Where } y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \quad 2\frac{1}{2}$$

(5)

92382

(ख) हल कीजिए :

$$3Dx + Dy + 2x = 1$$

$$Dx + 4Dy + 3y = 0$$

$$\text{Where } x(0) = 3, y(0) = 0 \quad 2$$

Section-IV

खण्ड-IV

7. (a) Find the Fourier transform :

$$f(u) = \begin{cases} u^2, & |u| < u_0 \\ 0, & |u| > u_0 \end{cases} \quad 2\frac{1}{2}$$

(b) Find the Fourier Cosine transform of x^{m-1} . 2

(क) फोरियर रूपांतर ज्ञात कीजिए :

$$f(u) = \begin{cases} u^2, & |u| < u_0 \\ 0, & |u| > u_0 \end{cases} \quad 2\frac{1}{2}$$

(ख) x^{m-1} का फोरियर कोज्या रूपांतर ज्ञात कीजिए। 28. (a) Find the Finite Fourier sine transform of $f(x) = 1$. 2

2

(b) Solve :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ given that}$$

$$(i) u(0, t) = 0$$

92382

92382

P.T.O.

(6)

92382

$$(ii) u = \begin{cases} 1; & 0 < x < 1 \\ 0; & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{at } t = 0$$

(iii) $u(x, t)$ is bounded

2

(क) $f(x) = 1$ का परिमित फोरियर ज्या रूपांतर ज्ञात कीजिए। $2\frac{1}{2}$

(ख) हल कीजिए :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ दिया है}$$

$$(i) u(0, t) = 0$$

$$(ii) u = \begin{cases} 1; & 0 < x < 1 \\ 0; & x \geq 1 \end{cases} \quad t = 0 \text{ पर}$$

(iii) $u(x, t)$ बंधित है।

2

Section-V

खण्ड-V

9. (a) Show that $x=0$ is an ordinary point of differential equation.

$$(x^2 + 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - xy = 0 \quad 1\frac{1}{2}$$

(b) Show that: $J_{1/2}(x) = J_{-1/2}(x) \tan x \quad 1\frac{1}{2}$ (c) Show that: $\frac{1}{3} [P_0(x) + 2P_2(x)] = x^2. \quad 1\frac{1}{2}$ (d) Evaluate: $L[\sin 2t \cos 3t]. \quad 1\frac{1}{2}$

92382

(7)

92382

$$(e) \text{ Solve: } L^{-1} \left[\frac{1}{S} \cos \frac{1}{S} \right] \quad 1\frac{1}{2}$$

(f) Give Parseval's identity for Fourier transform.

 $1\frac{1}{2}$ (क) दिखाइए कि $x=0$ अवकल समीकरण का सामान्य बिंदु है।

$$(x^2 + 1) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - xy = 0 \quad 1\frac{1}{2}$$

(ख) दिखाइए कि: $J_{1/2}(x) = J_{-1/2}(x) \tan x \quad 1\frac{1}{2}$ (ग) दिखाइए: $\frac{1}{3} [P_0(x) + 2P_2(x)] = x^2. \quad 1\frac{1}{2}$ (घ) मान निकालिए: $L[\sin 2t \cos 3t]. \quad 1\frac{1}{2}$

$$(ङ) \text{ हल कीजिए: } L^{-1} \left[\frac{1}{S} \cos \frac{1}{S} \right] \quad 1\frac{1}{2}$$

(च) फोरियर रूपांतर के लिए पार्सेवल सर्वसमिका दीजिए। $1\frac{1}{2}$

92382