Roll No. ....

91727

B. A. 2nd Semester (Pass Course) Examination – May, 2016

MATHS-III (Vector Calculus)

Paper : BM-123

Time : Three Hours] *[Maximum Marks : 26*

Before answering the questions, candidates should ensure that they have been supplied the correct and complete question paper. No complaint in this regard, will be entertained after examination.

प्रश्नों के उत्तर देने से पहले परीक्षार्थी यह सुनिश्चित कर लें कि उनको पूर्ण एवं सही प्रश्न-पत्र मिला है। परीक्षा के उपरान्त इस संबंध में कोई भी शिकायत नहीं सुनी जायेगी।

Note : Attempt *five* questions in all, selecting *one* question from each Section. Q. No. 9 (Section-V) is *compulsory*.

प्रत्येक खण्ड से ***एक*** प्रश्न चुनते हुए, कुल ***पाँच*** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न संख्या 9 (खण्ड-V) ***अनिवार्य*** है।

SECTION – I
खण्ड – I

1. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for three non-parallel and non-zero vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ to be coplanar is $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0$. $2\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिए कि तीन असमान्तर और अशून्य सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ के एक समतलीय होने की आवश्यक और पर्याप्त शर्त है :

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=0$$

(b) Show that $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}), \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}), \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ are coplanar. $2\frac{1}{2}$

दिखाइए कि $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}), \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}), \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})$ समतलीय है।

2. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for the vector $\vec{f}$ of a scalar variable to be constant is $\frac{d\vec{f}}{dt}=0$. $2\frac{1}{2}$

एक अदिश चर का सदिश $\vec{f}$ के नियत होने की आवश्यक व पर्याप्त शर्त $\frac{d\vec{f}}{dt}=0$ है। सिद्ध कीजिए।

(b) A particle moves along the curve $x=3t^2$, $y=t^2-2t$, $z=t^3$. Find its velocity and acceleration at $t=1$ in the direction of vector $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$. $2\frac{1}{2}$

एक कण वक्र $x=3t^2$, $y=t^2-2t$, $z=t^3$ के अनुदिश गतिमान है। सदिश $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ की दिशा में $t=1$ पर इसका वेग व त्वरण ज्ञात कीजिए।

SECTION – II

खण्ड – II

3. (a) If $r=|\vec{r}|$, where $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, then prove that : $2\frac{1}{2}$

यदि $r=|\vec{r}|$, जहाँ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\nabla f(r)\times\vec{r}=\vec{0}$$

(b) If $r=|\vec{r}|$, where $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, then prove that : $2\frac{1}{2}$

यदि $r=|\vec{r}|$, जहाँ $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$div\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=\frac{2}{r}$$

4. (a) If $\vec{f}=xz^2\hat{i}+2y\hat{j}-3xz\hat{k}$, $\vec{g}=3xz\hat{i}+2yz\hat{j}-z^2\hat{k}$, then find $\vec{f}\times(\nabla\times\vec{g})$ at the point (1, −1, 2). $2\frac{1}{2}$

यदि $\vec{f} = xz^2\hat{i} + 2y\hat{j} - 3xz\hat{k}$, $\vec{g} = 3xz\hat{i} + 2yz\hat{j} - z^2\hat{k}$, तो बिन्दु $(1, -1, 2)$ पर $\vec{f} \times (\nabla \times \vec{g})$ ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that : $2\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिए :

$$\nabla^2\left(\frac{x}{r^2}\right) = -\frac{2x}{r^4}$$

SECTION – III

खण्ड – III

5. (a) Derive the expression for $\nabla\phi$ in orthogonal curvilinear coordinates. $2\frac{1}{2}$

आर्थोगोनल कर्विलिनियर निर्देशांकों में $\nabla\phi$ के लिए व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

(b) Prove that the cylindrical coordinate system is orthogonal. $2\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिए कि सिलिन्ड्रिकल निर्देशांक निकाय आर्थोगोनल होता है।

6. (a) If (r, θ, ϕ) are spherical coordinates, then show that : $2\frac{1}{2}$

यदि (r, θ, ϕ) गोलीय निर्देशांक हैं तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla \times (\cos\theta \, \nabla \phi)$$

(b) Express the vector $\vec{f} = xyz^2\hat{i} + yz\hat{j} + xy\hat{k}$ in terms of cylindrical and spherical polar coordinates. $2\frac{1}{2}$

सदिश $\vec{f} = xyz^2\hat{i} + yz\hat{j} + xy\hat{k}$ सिलिन्ड्रिकल और गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों के पदों में व्यक्त कीजिए।

SECTION – IV

खण्ड – IV

7. (a) Evaluate $\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$, where $\vec{f} = xy\hat{i} + 2yz\hat{j} - 9zx\hat{k}$ and C is a curve given by $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$, where t varies from -1 to 2. $2\frac{1}{2}$

$\int_C \vec{f} \cdot d\vec{r}$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\vec{f} = xy\hat{i} + 2yz\hat{j} - 9zx\hat{k}$ और C, $\vec{r} = t\hat{i} + t^2\hat{j} + t^3\hat{k}$ द्वारा दिया गया वक्र है जहाँ t, -1 से 2 तक परिवर्तनशील है।

(b) Evaluate $\iint_S \vec{f} \cdot \hat{n}\, ds$, where $\vec{f} = z\hat{i} + x\hat{j} + 3y^2z\hat{k}$ and S is a surface of the cylinder $x^2 + y^2 = 16$ included in the first octant between $z = 0$ and $z = 5$. $2\frac{1}{2}$

$\iint\limits_S \vec{f}\cdot\hat{n}\,ds$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $\vec{f} = z\hat{i} + x\hat{j} + 3y^2z\hat{k}$ और S, $z = 0$ और $z = 5$ के बीच प्रथम अष्टक में इन्क्लूड किया हुआ सिलिण्डर $x^2 + y^2 = 16$ का पृष्ठ है।

8. (a) Verify Gauss divergence theorem for $\vec{f} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ taken over the region bounded by the cylinder $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 4$. $2\frac{1}{2}$

सिलिण्डर $x^2 + y^2 = 9$, $z = 0$, $z = 4$ द्वारा आबद्ध क्षेत्र पर लिये गये $\vec{f} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ के लिए गाउस डाइवर्जेन्स प्रमेय का परीक्षण कीजिए।

(b) Verify Green's theorem in the plane for $\oint\left(xy + y^2\right)dx + x^2dy$, where C is the closed curve of the region bounded by $y = x$ and $y = x^2$. $2\frac{1}{2}$

$\oint\left(xy + y^2\right)dx + x^2dy$ के लिए समतल में ग्रीन प्रमेय का परीक्षण कीजिए, जहाँ C, $y = x$ और $y = x^2$ से आबद्ध क्षेत्र का बन्द वक्र है।

SECTION – V

खण्ड – V

9. (a) For what value of λ, the vectors (2, –4, 5), (1, –λ, 1), (3, 2, –5) are coplanar. 1

λ के किस मान के लिए सदिश (2, –4, 5), (1, –λ, 1), (3, 2, –5) समतलीय है।

(b) Prove that $\vec{a}\cdot\vec{a'} = 1$, where, $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ are three non-coplanar vectors so that $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$. 1

सिद्ध कीजिए $\vec{a}\cdot\vec{a'} = 1$, जहाँ $\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$ तीन असमतलीय सदिश हैं दिखाइए कि $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$.

(c) Interpret the symbol $\vec{a}\cdot\nabla$ 1

प्रतीक $\vec{a}\cdot\nabla$ को इन्टरप्रीट कीजिए।

(d) Find the transformation from cylindrical to rectangular coordinates. 1

सिलिण्ड्रिकल से रेक्टैंगुलर निर्देशांकों का रूपान्तरण ज्ञात कीजिए।

(e) Define a volume integral. 1

आयतन समाकल को परिभाषित कीजिए।

(f) State Gauss Divergence theorem. 1

गाउस डाइवर्जेन्स प्रमेय बताइए।