92132

B.A. 3rd Semester Pass (New Scheme) Examination, December–2015

MATHEMATICS–I

Paper—BM–231

(Advanced Calculus)

Time allowed : 3 hours] *[Maximum marks : 27*

Note : *Attempt* ***five*** *questions, selecting* ***one*** *question from each section.* **Section–V** *is* ***compulsory.***

नोट : प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। खण्ड–V अनिवार्य है।

Section–I

खण्ड–I

1. (a) Let f be a function defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{when } x \text{ is rational} \\ -1 & \text{when } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Show that f is discontinuous on R. 2½

यदि फलन f परिभाषित है

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -1 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

दिखाइए कि f, R पर असतत है। 2½

(b) State and prove Darboux's Theorem. 2

डारबक्स के प्रमेय का उल्लेख तथा सिद्ध कीजिए। 2

2. (a) Evaluate :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$ 2½

मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$ 2½

(b) Evaluate :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin hx}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$ 2

मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin hx}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$ 2

Section–II

खण्ड–II

3. (a) Show that the function $f : R^2 \to R$ defined by

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

is continuous at (0, 0) 2½

दिखाइए कि फलन $f : R^2 \to R$ जो कि परभाषित है

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \text{ द्वारा} \\ 0 & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

(0, 0) पर सतत है। 2½

(b) If $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$, prove that

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}\right)^2$$ 2

यदि $x = r\cos\theta$ तथा $y = r\sin\theta$, सिद्ध कीजिए। कि

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y}\right)^2$$ 2

4. (a) If $u = x\,\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, Show that

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ 2½

यदि $u = x\,\phi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, दिखाइए कि

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ 2½

(b) Prove that :

$$x^4+x^2y^2-y^4=1+6(x-1)-2(y-1)+\frac{1}{2!}\left[14(x-1)^2-10(y-1)^2 + 8(x-1)(y-1)\right]+\cdots$$ 2

सिद्ध कीजिए कि :

$$x^4+x^2y^2-y^4=1+6(x-1)-2(y-1)+\frac{1}{2!}\left[14(x-1)^2-10(y-1)^2 + 8(x-1)(y-1)\right]+\cdots$$ 2

Section–III

खण्ड–III

5. (a) Give an example of a function of two variables which is continuous and possesses first oder partial derivatives at a point but not differentiable at that point. 2½

दो चरों के एक फलन का उदाहरण दीजिए जो एक बिंदु पर सतत है तथा प्रथम अनुक्रम के आंशिक अवकलनों को रखता है परन्तु उस बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है। 2½

(b) Give an example of a function f (x, y) for which $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ 2

एक फलन f (x, y) का उदाहरण दीजिए जिसके लिए $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$ 2

6. (a) Examine for maximum and minimum values :

$\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ 2½

अधिकतम व न्यूनतम मानों के लिए जाच कीजिए :

$\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ 2½

(b) Find the maximum and minimum distance of the point (3, 4, 12) from the sphere $x^2+y^2+z^2=1$ using Lagrange's method of multipliers. 2

लेग्रांज की गुणांक विधि का प्रयोग करते हुए बिंदु (3, 4, 12) की गोलक $x^2+y^2+z^2=1$ से अधिकतम व न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 2

Section–IV

खण्ड–IV

7. (a) Show that the length of the curve

$$x=2a\left(\sin^{-1}t+t\sqrt{1-t^2}\right),\ y=2at^2,\ z=4at$$

between the points $t=t_1$ and $t=t_2$ is $4a\sqrt{2}\,(t_2-t_1)$ 2½

दिखाइए कि बिंदुओं $t=t_1$ व $t=t_2$ के बीच वक्र

$$x=2a\left(\sin^{-1}t+t\sqrt{1-t^2}\right),\ y=2at^2,\ z=4at$$

की लंबाई $4a\sqrt{2}\,(t_2-t_1)$ है। 2½

(b) For the curve $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$, show that any plane meets it in three points and find the equation of the osculating plane at $t = t_1$ 2

वक्र $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$ के लिए दिखाइए कि कोई तल इससे तीन बिंदुओं पर मिलता है तथा $t = t_1$ पर आश्लेषी तल का समीकरण ज्ञात कीजिए। 2

8. (a) Find the curvature and torsion of the curve :

$\vec{r} = (at - a\sin t,\ a - a\cos t,\ bt)$ 2½

वक्र की वक्रता तथा विमोटन ज्ञात कीजिए :

$\vec{r} = (at - a\sin t,\ a - a\cos t,\ bt)$ 2½

(b) Prove that the curve $\vec{r}$ is a plane curve if and only if $[\vec{r}'\ \vec{r}''\ \vec{r}'''] = 0$ 2

सिद्ध कीजिए कि वक्र $\vec{r}$ एक तल वक्र है यदि और केवल यदि $[\vec{r}'\ \vec{r}''\ \vec{r}'''] = 0$ 2

Section–V

खण्ड–V

9. (a) Prove that the function $\sin|x|$ is continuous

सिद्ध कीजिए कि फलन $\sin|x|$ सतत है।

(b) State Taylor's Theorem.

टेलर के प्रमेय का उल्लेख कीजिए।

(c) If $u = \log \frac{x^2 + y^2}{xy}$, show that $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$

यदि $u = \log \frac{x^2 + y^2}{xy}$, दिखाइए कि $\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$

(d) State Young's Theorem.

यंग के प्रमेय का उल्लेख कीजिए।

(e) Define Osculating plane.

आश्लेषी तल को परिभाषित कीजिए।

(f) Write Serret-Frenet formulae. 1½ each

सेरेट फ्रेनेट के सूत्र लिखिए। 1½ प्रत्येक