

(e) Examine extreme values :

$$x^2 + y^2 + 6x + 12$$

दूरस्थ मानों की जाँच कीजिए :

$$x^2 + y^2 + 6x + 12$$

(f) Find radius of curvature of helix

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

$$z = at \tan \alpha.$$

सर्पिल की दकृता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

$$z = at \tan \alpha.$$

B. Sc. 3rd Semester Pass (New Scheme)

Examination, December-2015

MATHEMATICS

Paper-BM-231

Advanced Calculus

Time allowed : 3 hours] [Maximum marks : 40

Note : Attempt five questions in all, selecting one question from each section. All questions carry equal marks. Question No. 9 is compulsory.

नोट : प्रत्येक खण्ड से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्न कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं। प्रश्न संख्या 9 अनिवार्य है।

Section-I

खण्ड-I

1. (a) Prove that every function defined and continuous on a closed interval is bounded in that interval.

सिद्ध कीजिए कि एक बंद अंतराल पर परिभाषित तथा सतत प्रत्येक फलन उस अंतराल में बंधित है।

(b) Let function f is defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \text{ is rational} \\ -1 & \text{if } x \text{ is Irrational} \end{cases}$$

Show that f is discontinuous at every pt. of $\mathbb{R}$.

मान लें फलन f

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ -1 & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित है। दिखाइए कि $f: \mathbb{R}$ के प्रत्येक बिन्दु पर असतत है।

2. (a) If a function f is defined on $[a, b]$ is such that

(i) f is derivable on $[a, b]$

(ii) $f'(a)$ and $f'(b)$ are of opposite signs,

Then $\exists$ Some pt. $c \in (a, b)$ such that $f'(c) = 0$.

यदि $[a, b]$ पर परिभाषित एक फलन f इस प्रकार से है कि

(i) $[a, b]$ पर f व्युत्पाद्य है।

(ii) $f'(a)$ तथा $f'(b)$ विपरीत चिह्न के हैं,

तब $\exists$ कुछ बिन्दु $c \in (a, b)$ इस प्रकार से कि $f'(c) = 0$

(b) Show that :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

दिखाइए कि :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e + \frac{ex}{2}}{x^2} = \frac{11e}{24}$$

Section-II

खण्ड-II

3. (a) If z is a function of x and y given by the equation

$$x^x y^y z^z = c \text{ where } c \text{ is constant}$$

Then show that at $x = y = z$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -[x \log ex]^{-1}$$

यदि z एक फलन है x तथा y का, जो दिया गया है समीकरण

$$x^x y^y z^z = c \text{ द्वारा जहाँ } c \text{ स्थिरांक है।}$$

तब दिखाइए कि $x = y = z$ पर

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -[x \log ex]^{-1}$$

(b) If A, B, C are angles of a Δ such that

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \text{constant}$$

$$\text{Prove that : } \frac{dA}{dB} = \frac{\tan C - \tan B}{\tan A - \tan C}$$

यदि A, B, C ; $a \Delta$ के कोण हैं इस प्रकार से कि

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \text{स्थिरांक}$$

$$\text{सिद्ध कीजिए कि : } \frac{dA}{dB} = \frac{\tan C - \tan B}{\tan A - \tan C}$$

92006

(4)

4. (a) Show that the function $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

is continuous at $(0, 0)$

दिखाइए कि फलन $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ जो परिभाषित है

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right) & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; \text{अन्यथा} \end{cases}$$

द्वारा, $(0, 0)$ पर सतत है।

- (b) Expand $x^2y - 5y + 7$ in power of $(x - 1)$ and $(y + 2)$ using Taylor's series.

$x^2y - 5y + 7$ को $(x - 1)$ तथा $(y + 2)$ की शक्तों में विस्तारित कीजिए टेलर की शृंखला का उपयोग कीजिए।

Section-III

खण्ड-III

5. (a) If f_x, f_y, f_{xy} all exist in the nbd of a Pt. (a, b) and f_{yx} is continuous at the Pt. (a, b) then $f_{xy}(a, b)$ also exists at (a, b) and $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

यदि f_x, f_y, f_{xy} सभी किसी बिन्दु (a, b) के nbd में मौजूद हैं तथा f_{yx} बिन्दु (a, b) पर सतत है तब $f_{xy}(a, b)$ भी (a, b) पर मौजूद है तथा $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$

92006

92006

(5)

- (b) Prove that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is not differentiable at $(0, 0)$.

सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4 + y^4} & \text{यदि } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{यदि } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$(0, 0)$ पर अवकलीय नहीं है।

6. (a) Examine for maximum and minimum values of the function $\sin x + \sin y + \sin(x + y)$
फलन $\sin x + \sin y + \sin(x + y)$ के अधिकतम तथा न्यूनतम मानों के लिए जाँच कीजिए।

- (b) Find the volume of the largest rectangular parallelepiped that can be inscribed in the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

वृहदतम आयताकार पैरालेलोपिपेड का आयतन ज्ञात कीजिए जिसे दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

में अंतर्गत किया जा सकता हो।

92006

P.T.O.

(6) 92006

Section-IV

खण्ड-IV

7. (a) Express $\vec{r} = e^{2t} \cos t \hat{i} + e^{2t} \sin t \hat{j} + e^{2t} \hat{k}$, $-\infty < t < \infty$ in the normal form

$\vec{r} = e^{2t} \cos t \hat{i} + e^{2t} \sin t \hat{j} + e^{2t} \hat{k}$, $-\infty < t < \infty$ को प्रसामान्य प्रारूप में व्यक्त कीजिए।

- (b) For the curve $x = 3t$

$$y = 3t^2$$

$$z = 2t^3$$

Show that any Plane meets it in three pts and find the equation of osculating Plane at $t = t_1$.

$$\text{वक्र } x = 3t$$

$$y = 3t^2$$

$$z = 2t^3$$

के लिए दिखाइए कि इससे कोई तल तीन बिंदुओं में मिलता है तथा $t = t_1$ पर आश्लेषी तल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. (a) Show that the radius R of the spherical curvature is given by

$$R^2 = \rho^4 \sigma^2 (\ddot{r}''')^2 - \sigma^2$$

दिखाइए कि गोलकीय वक्रता की त्रिज्या R दी गई है

$$R^2 = \rho^4 \sigma^2 (\ddot{r}''')^2 - \sigma^2 \text{ द्वारा}$$

92006

(7) 92006

- (b) Find involutes of the circular helix $x = a \cos u$,

$$y = a \sin u, z = au \tan \alpha$$

द्वितीय सर्पिल के $x = a \cos u, y = a \sin u, z = au \tan \alpha$ के अंतर्वर्तनों को ज्ञात कीजिए।

Section-V

खण्ड-V

(Compulsory Question)

(अनिवार्य प्रश्न)

9. (a) Define open and closed set with examples.

उदाहरण सहित खुले तथा बंद समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

- (b) State Rolle's Theorem.

रोले के प्रमेय को बताइए।

- (c) Evaluate :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{e^{\sin x} - e^x} \right)$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \sin x}{e^{\sin x} - e^x} \right)$$

- (d) If $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ Then find $\frac{\partial z}{\partial x}$ and $\frac{\partial z}{\partial y}$

यदि $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ तब ज्ञात कीजिए $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$

92006

[P.T.O.]